Fascination mathématique ou analyse économique : l'exemple de la transformation des valeurs en prix

note hussonet n°96, 23 mars 2016

Toute une branche de l'économie, que l'on peut qualifier de « néo-ricardienne », a développé une théorie des prix de production. Cette théorie est devenue de plus en plus formalisée en s'appuyant sur le calcul matriciel. Cette note voudrait montrer que la fascination exercée par cette modélisation mathématique débouche sur une déconnexion des problématiques économiques.

Fascination des mathématiques

Le point de départ est une équation qui s'écrit $\lambda p=Ap$.
p est un vecteur (n,1), A une matrice carrée (n,n) et λ un scalaire.

Ce type d'équation possède un certain nombre de propriétés établies à partir du théorème dit de Perron-Frobenius. Ce dernier permet notamment de démontrer que si A est une matrice semi-positive (tous ses éléments sont positifs ou nuls), alors :

1) λ est la valeur propre dominante de la matrice A supérieure en valeur absolue aux autres valeurs propres.

2) il existe un unique vecteur p dont tous les éléments sont positifs.

Il se trouve que l'on peut établir une homologie à peu près parfaite entre ce problème mathématique et la théorie néo-ricardienne des prix de production. Il suffit en effet de poser $\lambda=1/(1+r)$ pour réécrire cette équation sous la forme : $p=(1+r)Ap$

Le vecteur p peut alors être interprété comme le vecteur des prix de production et r comme le taux de profit. A représente la matrice « augmentée » des conditions techniques de production : elle spécifie, pour chaque marchandise, les quantités d'autres marchandises nécessaires à la production d'une unité. Elle est dite « augmentée » parce que ces « conditions techniques » incorporent les « biens-salaires », autrement dit les marchandises consommées par les salariés.

Cette correspondance miraculeuse entre mathématiques et économie conduit alors à ce résultat : dans la mesure où la matrice A est une donnée du problème, l'équation admet une solution qui permet de calculer des prix de production (relatifs) et de déterminer le taux de profit. Le théorème garantit en outre que le taux de profit et les prix ainsi calculés sont tous positifs ou nuls.

D'autres conditions doivent être remplies par la matrice A. Mais là encore, et cela rajoute à l'effet de fascination, elles ont une interprétation économique évidente qui revient à ceci : le système économique doit produire au moins autant de marchandises qu'il n'en consomme pour cette production. Et si le système ne produit aucun produit net, alors le taux de profit est nul.

Cette fascination est encore redoublée si l'on observe qu'au système $\lambda p=Ap$ correspond un « problème dual » qui s'écrit : $\mu q=qA$. On peut alors établir que la solution de ce problème est la même valeur propre dominante, autrement dit que $\mu=\lambda$. Et là encore, la traduction économique est possible et encore plus lisible si l'on pose $(1+g)=1/\mu$.

L'équation s'écrit alors $q=(1+g)qA$ et on peut l'interpréter économiquement : q représente le vecteur des *outputs* (les quantités produites de chaque marchandise) et qA les *inputs* (les quantités de marchandises dépensées à cette production). g est alors le taux de croissance de cette économie. Et comme $\mu=\lambda$, on a aussi $g=r$. Autrement dit le taux de croissance est égal au taux de profit. Il y a donc une correspondance entre prix, profit et croissance établie sur la seule base des quantités physiques.

Ce système de prix donne des résultats qui ne peuvent être reliés à ceux que l'on obtient à partir d'un système en valeurs. C'est pourquoi ces formalisations matricielles servent de base à la critique du traitement par Marx du problème de la transformation des valeurs en prix de production.

Deux dispositifs théoriques ont été inventés pour maintenir un pont entre valeurs et prix. Le premier consiste à utiliser un processus d'itération qui conduit des valeurs aux prix de production et le second à réduire les prix à des quantités de travail. Dans ce qui suit, on va montrer que ces deux dispositifs sont formellement équivalents, puis que le constat de cette équivalence conduit à s'interroger sur la temporalité économique mise en oeuvre.

Itération des valeurs vers les prix

Le premier dispositif consiste à dire que les prix de production peuvent être obtenus comme la limite d'un processus d'itération qui part des valeurs. C'est la solution proposée notamment par Anwar Shaikh : « La procédure d'itération, dont la transformation de Marx constitue la première étape, va converger vers les prix de production "corrects" » (Shaikh 1977 : 97).

Morishima et Catephores (M&C dans ce qui suit) proposent un traitement analogue (M&C 1978 : 160-166). Ils entendent montrer que Marx n'a pas en réalité commis l'erreur consistant à « transformer » les *outputs* mais pas les *inputs*. Le calcul de Marx peut se résumer selon cette formule : $p=(1+r).(c+v)$, où p est le prix de production, c le capital constant, v le capital variable, et r le taux de profit. Mais c et v sont exprimés en valeurs et donc la relation n'est pas cohérente.

La réponse consiste alors à dire que cette formule n'est que le premier terme d'une itération dont la formule générale est : $p_t=(1+r)Ap_{t-1}$. Cette série converge vers les prix de production, indépendamment de la valeur initiale p_0. Et Marx aurait fait le choix le plus « efficace » en démarrant avec les valeurs « parce qu'il savait (...) que ces valeurs ne seraient pas très éloignées des prix d'équilibre correspondants ». Tout cela est évidemment d'une grande absurdité : la convergence vers la solution « correcte » ne dépend pas de la valeur initiale. On pourrait aussi bien choisir « le nombre de lettres dans le nom de la marchandise traduit en serbo-croate », comme le suggère Hodgson (1982 : 97).

La résolution mathématique de ce processus d'itération n'est pas simple. La difficulté est que dans l'algorithme de M&C, $p_t=(1+r)Ap_{t-1}$, seule la matrice technique A semble *a priori* connue. Il faut donc choisir une valeur initiale p_0 du vecteur des prix, mais il faudrait aussi connaître par avance le taux de profit r. C'est le cas selon M&C : « dans cette équation, nous pouvons considérer la matrice $A^*=(1+r)A$ comme donnée, puisque A est donnée et que r a été déterminé » [nous avons traduit leurs notations]. Mais comment ? Le taux de profit r est égal à la plus-value totale divisée par le capital total. Mais ce calcul porte sur un système économique transformé. M&C commencent par éliminer les biens de luxe que Piero Sraffa appelle produits non fondamentaux : ce sont les marchandises qui n'entrent dans la production d'aucune autre marchandise. Ils passent ensuite à un calcul en termes physiques mais « il est évident, même pour un regard non-professionnel, qu'on ne peut additionner les plus-values obtenues en produisant une scie, une faucille, un bulldozer, un tour, une paire de chaussures, etc. ». La difficulté est résolue en combinant les diverses branches dans des proportions permettant d'homogénéiser les « taux de plus-value » ou plutôt les taux de rendement mesurés en quantités de travail.

A l'issue de cette démonstration compliquée, ses auteurs se croient autorisés à se prévaloir de Marx : « Nous devons donc être prêts à admettre que, dans le système de Marx, l'échelle de chaque secteur a déjà été ajustée à un niveau approprié, même si Marx ne l'explicite nulle part dans les trois livres du Capital. Il s'agit d'une manoeuvre implicite que Marx a effectuée en coulisses et qui devrait être reproduite sur scène ».

Cette référence à Marx n'a pas beaucoup de sens. Georg von Charasoff, un précurseur de cette ligne d'analyse, avait évidemment raison (en 1910) de conclure autrement :

« Marx commence par postuler que les prix initiaux des marchandises sont égaux à leurs valeurs. Puis il les modifie selon des montants proportionnels aux valeurs (autrement dit les prix initiaux) des capitaux, en faisant explicitement référence à la tendance propre au capitalisme à la formation d'un taux uniforme de profit. Cependant, Marx arrête là sa transformation des valeurs en prix au lieu de le surmonter en développant dialectiquement son idée de départ. C'est la première imperfection de sa théorie, que ses critiques lui ont sans cesse reprochée. Une deuxième imperfection est la suivante : Marx voulait à tout prix commencer à partir de la valeurs des marchandises. Mais cela est absolument hors de propos pour la théorie des prix proprement dite. Les prix de départ peuvent être arbitraires » (Charasoff 1910 : 138, cité par Egidi & Gilibert 1989 : 72).

Réduction à des quantités de travail

Le dispositif consiste à décomposer le prix en additionnant la quantité de travail dépensé à la production de la marchandise avec celle qui est contenue dans les moyens de production, puis dans les moyens de production de ces moyens de production, etc. Bref on « circule » dans la matrice technique.

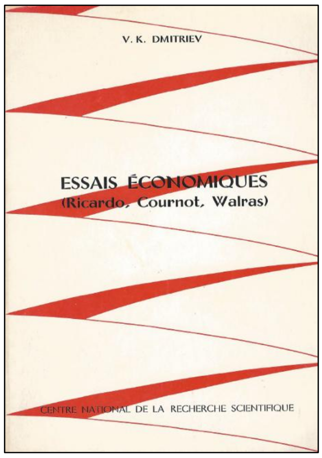
Sraffa détaille ainsi cette méthode : « Commençons par remplacer les marchandises formant les moyens de production [d'une marchandise donnée] par leurs propres moyens de production et quantités de travail, c'est-à-dire remplaçons ces moyens de production par les marchandises et le travail qui sont employés pour les produire ainsi qu'il ressort de leurs équations respectives. Ces marchandises et ce travail ayant été dépensés un an plus tôt, ils doivent être multipliés par un facteur de profit à un taux composé pour la période écoulée soit sur les moyens de production par $(1+r)^2$ et pour le travail par $(1+r)$. [...] Nous pouvons poursuivre cette opération aussi loin que nous voulons » (Sraffa 1970 : 43-45).

Cela donne une équation de la forme suivante :
$p=l_0.w(1+r) + l_1.w(1+r)^2 + \dots l_n.w(1+r)^n + \dots$

Le prix de la marchandise considérée est donc calculé en additionnant des quantités de travail directes et indirectes des périodes précédentes (l_0, l_1, l_n,...) valorisées par le salaire (w) et multipliées par le taux de profit composé selon le nombre de périodes écoulées. Cette formulation est un peu différente du schéma d'itération puisqu'elle sépare les biens-salaires des autres moyens de production, d'où la prise en compte du salaire w qui s'applique aux quantités de travail.

Ce procédé avait été déjà utilisé dès 1904 par un autre précurseur de cette école, Vladimir Karpovitch Dmitriev. Mais, chez Dmitriev, la réduction à des quantités de travail ne devait pas être considérée comme une remontée dans le temps. La quantité totale de travail calculée n'est pas la quantité effectivement dépensée dans le passé mais celle qui est requise dans les conditions de production actuelle :

« Ainsi pouvons-nous toujours, sans aucune incursion à l'époque préhistorique de la première apparition du capital technique, trouver la somme totale de travail, directement ou indirectement dépensé pour produire un produit quelconque *dans les conditions actuelles de production*, qu'il s'agisse de ce produit lui-même ou des capitaux techniques intervenant dans sa production. Le fait que tout capital soit lui-même produit, dans les conditions *actuelles*, avec le concours d'autres capitaux, ne fait nullement obstacle, ainsi que nous l'avons vu, à la résolution correcte du problème » (Dmitriev 1968 : 28).



La question de la temporalité

Cependant, au-delà de ces différences, ces deux dispositifs, « itération » et « réduction », convergent évidemment vers la même solution. D'un point de vue mathématique, ils doivent être interprétés comme deux algorithmes de résolution de l'équation fondamentale. Mais les choses sont plus compliquées d'un point de vue économique. Pour s'en rendre compte, il suffit de confronter Sraffa et Dmitriev.

Le premier introduit une clause essentielle : « ces marchandises et ce travail ayant été dépensés un an plus tôt ». Sraffa parle de « période écoulée », bref raisonne sur un temps discret, autrement dit la production n'est pas instantanée, ce qui semble raisonnable.

Dmitriev, au contraire, insiste que le fait qu'il raisonne à partir des *conditions actuelles de production* (les italiques sont de lui) : il n'est pas nécessaire selon lui de remonter à « l'époque préhistorique ».

Il est donc tout à fait troublant de constater que la procédure de réduction à des quantités de travail conduit au même résultat, puisqu'il s'agit au fond, dans les deux cas, du même algorithme permettant de résoudre le même problème, avec les mêmes données, à savoir les conditions techniques. Et pourtant, la temporalité n'est pas la même. Cette contradiction entre hypothèses différentes et résultats identiques ne peut être levée que de deux manières :

• ou bien on remonte effectivement dans le temps, d'une période de production à l'autre, comme le fait Sraffa (ou comme il pense le faire). Mais il suffit de se reporter à l'équation qui résume cet algorithme pour s'apercevoir que le calcul n'est possible que si la matrice des coefficients techniques est constante, ainsi d'ailleurs que le salaire.

• ou bien, comme Dmitriev, on raisonne sur les conditions techniques actuelles et on ne remonte pas dans le temps : on circule virtuellement dans la matrice technique. Autrement dit, les marchandises utilisées pour la production des marchandises et ces dernières sont « contemporaines » : elles appartiennent à la même période de production et leur temps de production est donc implicitement supposé nul.

Le processus d'itération conduit lui aussi à une interrogation analogue. Les prix de production « corrects » ne seront obtenus qu'au bout d'un nombre infini d'itérations. Toute la question est là encore de savoir quelle est la dimension temporelle de ce processus qui conduit lui aussi à la même solution. Si le temps t de l'itération est un temps réel, non instantané, autrement dit si l'itération fait passer d'une période à l'autre, on retrouve le même résultat : le calcul n'est possible qu'à la condition de supposer que les conditions techniques de production restent invariantes d'une étape à l'autre de l'itération.

Ou bien, il faut supposer que la dimension temporelle est, d'une manière à vrai dire difficile à concevoir, condensée à l'intérieur de la période considérée. Les itérations successives se font dans un temps virtuel, de manière à assurer la convergence en fin de période. Le temps de la convergence et celui de la période de production sont donc unifiés en un temps instantané.

Dans les deux cas, « réduction » et « itération », le dilemme est donc le même : soit une invariance, de toute éternité, des conditions techniques, soit une période de production de durée nulle, autrement dit une logique d'équilibre statique. Le point commun de ces deux procédés est au fond de prétendre - de manière subreptice et illégitime - condenser en une période finie un processus de durée infinie.

Dans le premier cas, on veut faire de chaque période successive la limite d'un processus de convergence, ce qui revient à réaliser ce tour de force de condenser une infinité d'infinis sur un même axe temporel.

Dans le second cas, il faut admettre qu'à l'intérieur d'une période de production, le processus de convergence « a le temps » d'atteindre leur limite. Fondamentalement, ces voies de sortie sont des impasses parce qu'elles enferment le problème de la transformation, qu'elles prétendent résoudre, dans une logique statique d'équilibre, parfaitement étrangère aussi bien à l'essence du capitalisme qu'à la méthode de Marx.

Pour sortir de cette impasse, il faut récuser, dès le départ, l'équation $\lambda p=Ap$ et la « temporaliser » en l'écrivant $\lambda p_t=Ap_{t-1}$. Dès lors, les prix des *outputs* (les marchandises produites) ne sont pas pris *a priori* égaux à ceux des *inputs* (les marchandises consommées dans la production). Le résultat est que tout le schéma mathématico-économique s'effondre. Mais, pour abandonner cette hypothèse cachée, il faut réussir à se défaire de la fascination mathématique, et le fameux problème de la transformation des valeurs en prix de production peut alors être posé correctement (Husson 1980).

Références

von Charasoff G. (1910), *Das System des Marxismus,* Berlin.

Dmitriev V.K. (1904), *Essais économiques*, Editions du CNRS, 1968.

Egidi M. & Gilibert G. (1989), « The objective theory of prices », *Political Economy: Studies in the Surplus Approach*, vol.5, n°1.

Hodgson G. (1982), *Capitalism, Value and Exploitation: A Radical Theory*, Blackwell.

Husson M. (1980), [Pérez M.], « Valeur et prix: un essai de critique des propositions néo-ricardiennes », *Critiques de l'Economie Politique*, nouvelle série n°10.

Morishima M., Cathephores G. (1978), *Value, Exploitation and Growth*, McGraw-Hill

Shaikh A. (1977), « Marx's Theory of Value and the "Transformation Problem" », *in* Jesse Schwartz (ed.), *The Subtle Anatomy of Capitalism*, Santa Monica,

Sraffa P. (1960), *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge University Press, ; traduction française : *Production de marchandises par des marchandises*, Dunod, 1970